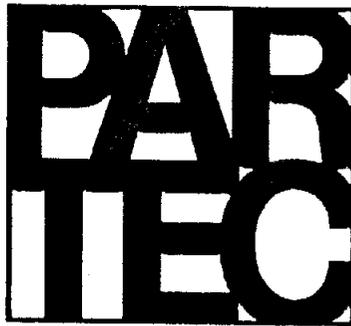


4. Europäisches
Symposium
Partikelmeßtechnik

4. European
Symposium
Particle Characterization



Nürnberg · West Germany
19.-21. April 1989



S. Röthele, H. Naumann, Dr. M. Heuer (Vortragender)
SYMPATEC GmbH, Clausthal, (BRD)

Die Anwendung der Fraunhofer-Beugung unter $1\mu\text{m}$
zur Partikelgrößenanalyse von $0.1\mu\text{m}$ bis $2000\mu\text{m}$

1 Einleitung

Die Anwendung der Fraunhofer-Methode als sogenannte Laser-Beugung zur Partikelgrößenanalyse hat mittlerweile eine so weite Verbreitung gefunden, daß sie als dominierender Standard bei den modernen Verfahren angesehen werden kann. Schnelligkeit und Reproduzierbarkeit der Messung, die abgedeckte Breite des jeweiligen Meßbereiches sowie die Einfachheit und der Komfort bei der Bedienung sind herausragende Merkmale für den Anwender.

Prinzipbedingte Restriktionen bei kleinen Partikelgrößen unter $5\mu\text{m}$ haben unterschiedliche Entwicklungen in Gang gesetzt, um teils durch Kombination mit anderen Ansätzen teils durch Erweiterung der Fraunhofer-Methode die untere Anwendungsgrenze zu überwinden oder doch wenigstens deutlich unter $1\mu\text{m}$ zu bringen. Inzwischen werden Beugungsspektrometer angeboten, die bis hinunter zu ca. $0.1\mu\text{m}$ messen sollen.

Die Wechselwirkung von Licht mit kleinen Kugeln wird von der Mie-Theorie beschrieben, deren Grenzbereiche vereinfacht durch die Rayleigh-Streuung im Feinen und die Fraunhofer-Beugung im Groben angenähert werden kann. Mie-Theorie und Rayleigh-Streuung sind gekennzeichnet durch starke Abhängigkeit von optischen Konstanten des untersuchten Systems, die jedoch meist nicht bekannt sind oder, wie z.B. bei Stoffgemischen, gar nicht eindeutig bestimmt werden können. Hinzu kommt die noch weitgehend unbekannt Formabhängigkeit, die im Fraunhofer-Bereich von untergeordneter Bedeutung ist.

Es wird gezeigt, welche grundsätzlichen Überlegungen die Anwendung der Theorie der Fraunhofer-Beugung im Submicron-Bereich rechtfertigen und wie damit - ohne stoffabhängige Kenntnis von z.B. Brechungsindex und Absorptionskoeffizient - zuverlässige Messungen gelingen. Die Leistungsfähigkeit dieser im SYMPATEC Submicron-HELOS ausgeführten Methode wird mit vergleichenden Ergebnissen zur Diskussion gestellt.

2 Grundlagen der Beugungsspektrometrie

Wegen der im Folgenden erforderlichen Rückbezüge werden die Grundlagen des benutzten Gerätes nochmals zusammengefaßt. Die ausführliche Darstellung ist den Veröffentlichungen von Heuer /1/ und Heuer und Leschonski /2/ zu entnehmen.

Beugungsspektrometer benutzen in der Regel eine optische Anordnung, wie sie in Abb. 1 dargestellt ist. Die Beugungsspektren wer-

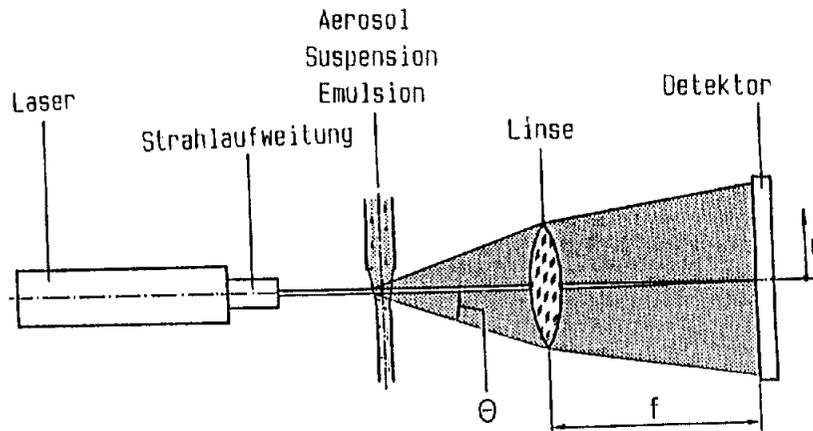


Abb. 1: Optische Anordnung zur Erzeugung von Beugungsspektren

den von den in den Laserstrahl gebrachten Partikeln in der Brennebene der nachgeschalteten Linse erzeugt und von einem speziellen Sensor detektiert. Die Auswertung basiert auf der Fredholmschen Integralgleichung, die die Intensitätsverteilung $I(r)$ eines Parti-

kelkollektives durch seine Anzahldichteverteilung $q_0(x)$ beschreibt.

In der Brennebene einer Linse im Abstand r vom Brennpunkt gilt:

$$I(r) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} N_{\text{ges}} q_0(x) I(r,x) dx \quad (1)$$

$I(r,x)$ ist die von Airy angegebene Intensitätsverteilung einer Kugel des Durchmessers x :

$$I(r,x) = I_0 (x^2 \pi / 2 f)^2 (J_1(z)/z)^2 \quad (2)$$

$$\text{mit } z = (\pi r x / \lambda f) \quad (3)$$

Die Fredholmsche Integralgleichung ist geschlossen oder numerisch lösbar. Die von Shifrin /3/ und Chin /4/ gezeigte geschlossene Lösung unter Benutzung der von Titchmarsh /5/ angegebenen Mellin-Transformation hat Bayvel /6/ erstmals angewendet. Die dabei in der Lösung erforderliche Differentiation der mit der dritten Potenz des Winkels gewichteten Meßwerte entzieht sich heute noch einer sicheren Beherrschung. Stabile, mit dieser Methode berechnete Ergebnisse, insbesondere in den Randbereichen der Partikelgrößenverteilungen sind uns nicht bekannt.

Alle weiteren Lösungsmöglichkeiten benutzen die numerische Quadratur d.h. die Überführung der Fredholmschen Integralgleichung in ein lineares Gleichungssystem:

$$L = A q \quad (4)$$

Dabei werden die Lichtleistungen L berechnet, die in ringförmigen konzentrischen Detektorelementen auftreten, wenn diese sich in der Brennebene der Linse befinden. A ist die aus Gleichung (2)

berechenbare Koeffizientenmatrix, deren Elemente die Lichtleistung einzelner Partikel in den jeweiligen Detektorringen darstellt. q ist der Vektor der gesuchten Kugelgrößenverteilung.

Es liegt in der Natur derartig aufgestellter linearer Gleichungssysteme, stark oszillierende Lösungen der Form

$$q = A^{-1} L \quad (5)$$

zu erzeugen. Die gesuchten Partikelgrößenverteilungen werden dabei von Oszillationen überlagert, die um ein Vielfaches größer sind, als die Verteilungen selbst. Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann daher nicht auf eine einfache Art nach Gleichung (5) erfolgen, sondern muß die Unterdrückung der Oszillationen beinhalten.

Die einfachste Methode zur Unterdrückung der Oszillationen ist die Vorgabe einer analytischen Funktion für die Partikelgrößenverteilung bei gleichzeitiger Minimierung der Fehlerquadrate. Diese Methode wurde in einigen der ersten Apparate verwirklicht und wird zum Teil heute noch optional angeboten. Dabei wird die Menge der möglichen Lösungen jedoch unzulässig stark eingeschränkt, so daß z.B. bimodale Verteilungen nicht wiedererkannt werden können.

Von den vielen iterativen Methoden sind die von Chahine /7/ und Mäkynen /8/ sowie die von Provencher /9/ vermutlich in zwei Geräten zum Einsatz gekommen. Die Glättungs- und Konvergenzeigenschaften dieser Verfahren sind sehr unterschiedlich und in ihrer Wirkung nur schwer zu beurteilen, da dabei auch die Art der Messung und der Meßwerterfassung eine Rolle spielt.

Eine parameterfreie Methode ist die von Phillips /10/ und Twomey /11/ beschriebene, geglättete Lösung unter Benutzung der Nebenbedingung, daß die Verteilungsdichte eine "glatte" Kurve ist. Für die Verteilungsdichte erhält man statt Gleichung (5):

$$q = (A^T + \gamma H)^{-1} A^T L \quad (6)$$

H ist die Glättungsmatrix, die mit dem Lagrang'schen Multiplikator γ gewichtet werden kann. Bei richtig gewähltem γ , dessen Größe u.a. vom optischen Aufbau und von der Qualität der Meßwert-

erfassung abhängt, können mit dieser Methode parameterfreie Partikelgrößenverteilungen gemessen werden.

Insgesamt ergeben sich also die in Tabelle 1 zusammengefaßten Lösungsmöglichkeiten.

Grundlage	: Fraunhofer Beugung
Auswerte-Basis:	Fredholm'sche Integralgleichung
prinzipielle Lösungen	geschlossen durch Anwendung der Mellin-Transformation: <ul style="list-style-type: none"> * Shifrin * Chin * Bayvel
	numerische Quadratur d.h. Überführung in lineares Gleichungssystem
	Methoden zur Oszillationsunterdrückung: <ul style="list-style-type: none"> * Vorgabe einer analytischen Funktion für die erwartete Größenverteilung: z.B. <ul style="list-style-type: none"> - RRSB - * iterative Methoden: <ul style="list-style-type: none"> - Chahine - Mäkynen - Provencher - * geglättete Lösung (constrained inversion) <ul style="list-style-type: none"> - Philips - Twomey

Tabelle 1 : Lösungswege bei der Analyse von Beugungsspektren

3 Anwendung im Submicron - Bereich

Wenn man den bereits sehr breiten Meßbereich bei der Fraunhofer Beugung, der sich von 1 - 3000 μm erstreckt, noch verbreitern und unter 1 μm (Submicron) messen will, ist der theoretische Ansatz zu überprüfen. Für Kugeln in diesem Größenbereich ist die von G. Mie 1908 gefundene geschlossene Lösung der Maxwell'schen Gleichungen gültig. Diese unter dem Namen Mie-Theorie bekannt gewordene Lösung beschreibt grundsätzlich alle Wechselwirkungen zwischen Licht und einer leitenden Kugel.

Die Wechselwirkungen werden, wie in Abb. 2 dargestellt, mit den Begriffen Reflektion, Beugung, Brechung und Absorption unterschieden. Mit der Fraunhofer-Lösung wird der dabei maßgebende Anteil der Beugung beschrieben.

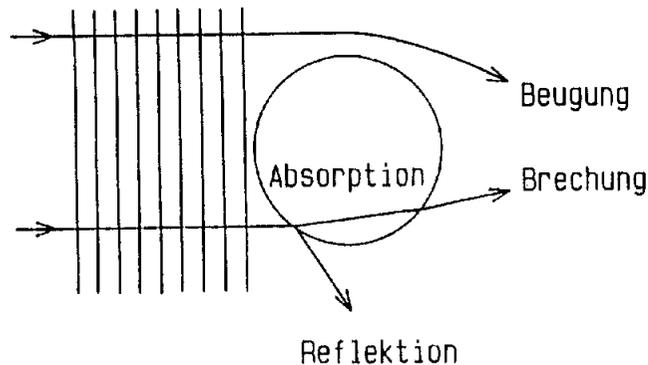


Abb. 2: Wechselwirkungen zwischen Licht und einer Kugel

Das einfallende Licht wird charakterisiert durch seine Wellenlänge λ und die Strahlungsintensität I_0 . Der Wechselwirkungspartner ist als Kugel vom Durchmesser x und dem komplexen Brechungsindex $m = n - ik$ mit der Brechzahl n und dem Absorptionskoeffizienten k definiert. Die Intensität des gestreuten Lichtes ist abhängig von diesen Parametern gemäß der Streufunktion

$$i = f(\theta, x, \lambda, m), \quad (7)$$

wobei θ den Beobachtungswinkel (Streuwinkel) angibt.

Üblicherweise unterteilt man das Streuverhalten vereinfachend in drei Bereiche. Die Abgrenzung erfolgt mit dem Mie-Parameter

$$\alpha = \pi \cdot x / \lambda \quad (8)$$

In Tabelle 2 sind die Bereiche definiert und vergleichend gegenübergestellt.

Bereich	α	Streufunktion	Proportionalität
Rayleigh	$\ll 1$	$i = f(\theta, \alpha, m)$	$i \approx x^6 / \lambda^4$
"Mie"	≈ 1	$i = f(\theta, \alpha, m)$	$(i \approx x^2)$
Fraunhofer	$\gg 1$	$i = f(\theta, \alpha)$	$i (\theta \neq 0) \approx x^2$ $i (\theta = 0) \approx x^4$

Tabelle 2: Bereiche des Streuverhaltens

Die Bezeichnungen " \gg " und " \ll " deuten an, daß die Grenzen nicht scharf sind und fließende Übergänge existieren. In Abb. 3 sind diese Bereiche und die dort bestimmenden, in Tab.2 angegebenen, Abhängigkeiten dargestellt.

Für einen Streuwinkel von 30° sind die Streufunktionen i_n über dem Mie-Parameter α doppeltlogarithmisch aufgetragen. Die mit Symbolen gekennzeichneten Kurven zeigen die für die angegebenen unterschiedlichen Brechungsindizes m berechneten abweichenden Verläufe. Neben den in Tab. 2 angegebenen Abhängigkeiten der Streulichtintensität von x^6 im Rayleigh-Bereich und x^2 im Fraunhofer-Bereich ist der außerordentlich starke Einfluß des Brechungsindex m deutlich erkennbar. Unterschiede der Streulichtintensität von 2 Zeh-

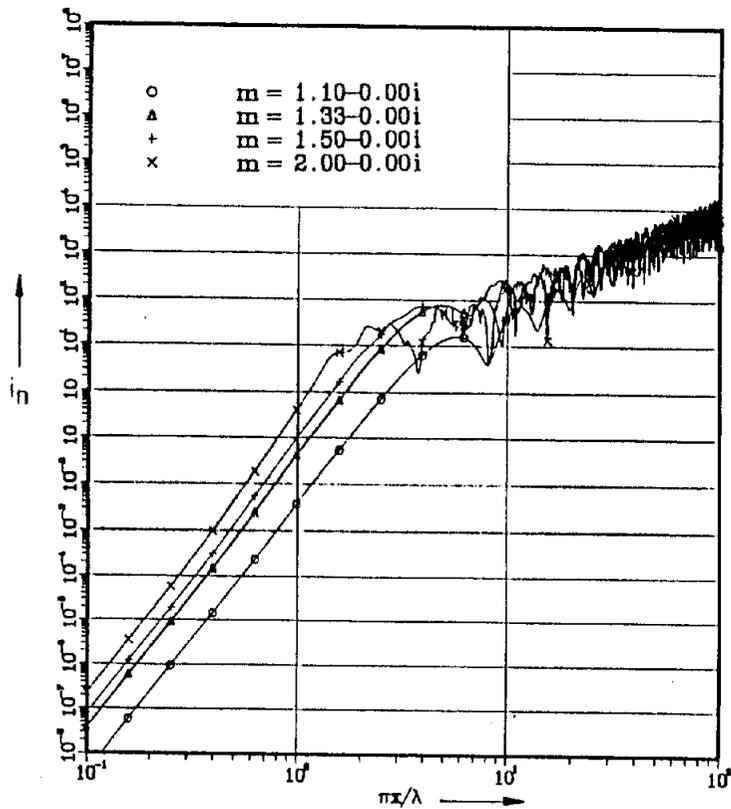


Abb. 3.: Streufunktionen i_n für Kugeln mit unterschiedlichen Brechzahlen n , berechnet nach der Mie-Theorie

nerpotenzen und mehr für eine Partikelgröße treten in weiten Bereichen auf.

Diesem Einfluß ist der des Absorptionsindex k überlagert, der in Abb. 4 variiert worden ist. Hier ergeben sich im Rayleigh-Bereich erkennbare Änderungen nur bei starker Absorption, außerhalb treten Änderungen schon bei geringer Absorption ein.

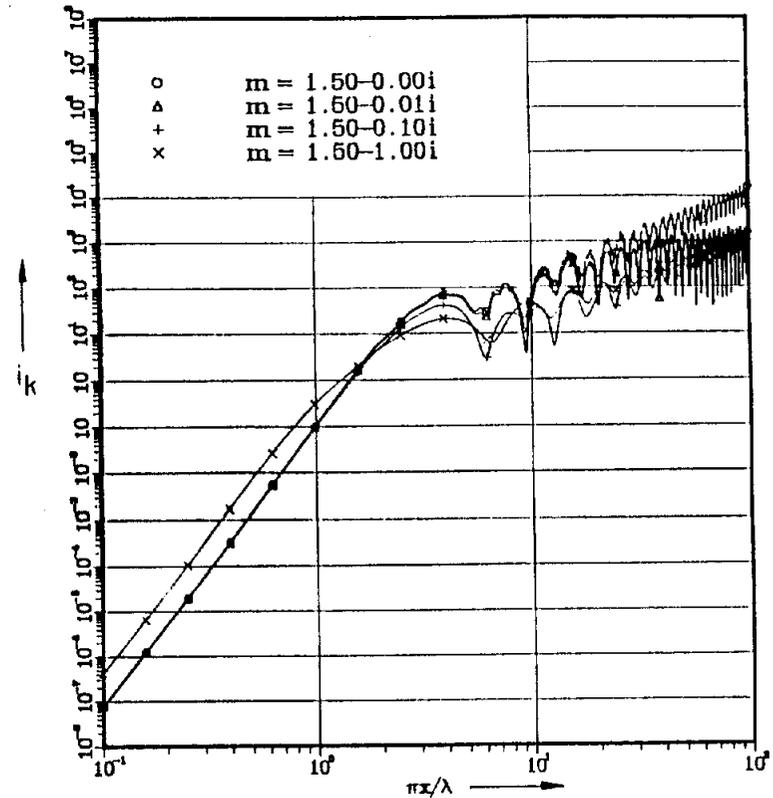


Abb. 4: Streufunktionen i_k für Kugeln der Brechzahl $n = 1,5$ mit unterschiedlichen Absorptionsindices k , berechnet nach der Mie-Theorie

Deutlich zu erkennen sind in den Abb. 3 und 4 starke Schwankungen im sogenannten klassischen Bereich der Beugungsspektromer $x > 1\mu\text{m}$ bzw. $\alpha > 5$.

Für die korrekte Anwendung der Mie'schen Gleichungen für die Partikelgrößenanalyse ist demnach die Kenntnis des komplexen Brechungsindex m unerlässlich. Brechzahl n und Absorptionsindex k sind jedoch nur in Ausnahmefällen bekannt. Unlösbar wird die Si-

tuation für Mischungen unterschiedlicher Materialien, bei beschichteten Partikeln und bei Prozessen, in denen sich der Brechungsindex ändert. Außerdem ist die Reaktion des Gleichungssystems auf Formabweichungen von der Kugel nicht geklärt. Zudem führen die starken Oszillationen der Kurven zu noch instabileren Gleichungssystemen und damit zu schlechter konditionierten Matrizen, die wiederum eine stärkere Glättung bedingen.

Diese schwer, beherrschbaren Einflüsse des Brechungsindex führen zu der Überlegung, die Grenze der "einfachen" und bewährten Auswertung mittels Fraunhofer auszuloten bzw. zu klären, ab welchen Partikelgrößen diese Abhängigkeiten wie wirksam werden und bis wohin die fließenden Grenzen vertretbar ausgedehnt werden können.

Die überschlägige Betrachtung des Grenzfalles $\alpha = 1$ führt zu folgenden Ergebnissen:

Medium	$n_{\pm 10}$	λ nm	$x(\alpha=1)/\mu\text{m}$
Luft	1	633	0,2
Wasser	1,33	476	0,151
Tetrachlor-ethylen	1,504	421	0,134

Tabelle 3: Partikelgrößen x für den Grenzfall $\alpha = 1$

Zugrunde liegt die Anwendung eines He-Ne-Lasers ($\lambda = 0,6328\mu\text{m}$).

Die für den Submicron-Bereich dominierende Anwendung in Flüssigkeit bedingt die Anpassung der wirksamen Wellenlänge gemäß

$$\lambda = \lambda_0/n. \quad (9)$$

Die resultierenden Partikelgrößen x zeigen, daß bei der Einbeziehung des Submicron-Bereiches ab $x > 0,1\mu\text{m}$ der betrachtete Grenzfall $\alpha = 1$ nicht wesentlich unterschritten wird.

Zur Beurteilung der zu erwartenden Abweichungen wird die Streufunktion betrachtet, die sich aus der Anwendung der Fraunhofer-Lösung im Bereich $0,1 < \alpha < 100$ im Vergleich zu den Mie-Kurven ergibt.

In Abb. 5 ist die Fraunhofer-Streufunktion i_F dargestellt.

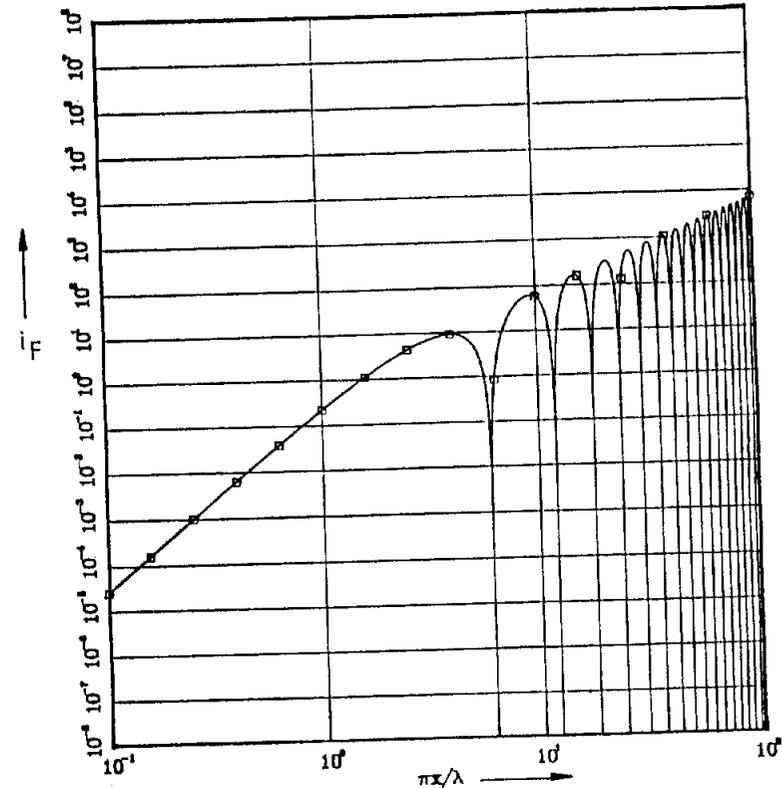


Abb. 5: Streufunktion, berechnet aus der Fraunhofer-Lösung

Bei der Anwendung der Fraunhofer-Lösung gibt es wegen der Unabhängigkeit vom Brechungsindex im gesamten α -Bereich nur eine Streufunktion. Sie zeigt im Bereich $0,1 < \alpha < 1$ den zu erwartenden x^4 -proportionalen Anstieg für kleine Partikel.

Im Bereich $1 < \alpha < 10$ erkennt man die erste Nullstelle der Bessel-Funktion sowie den Übergang in den beginnenden x^2 -proportionalen Anstieg, der sich in den Bereich $10 < \alpha < 100$ in der Verbindung der Wellkämme fortsetzt.

Durch die logarithmische Darstellung erscheinen die Nullstellen der Bessel-Funktion überbetont.

Abb. 6 zeigt die Fraunhofer-Streufunktion (Quadrate) im Vergleich mit den schon in Abb. 3 vorgestellten Streufunktionen nach der Mie-Theorie.

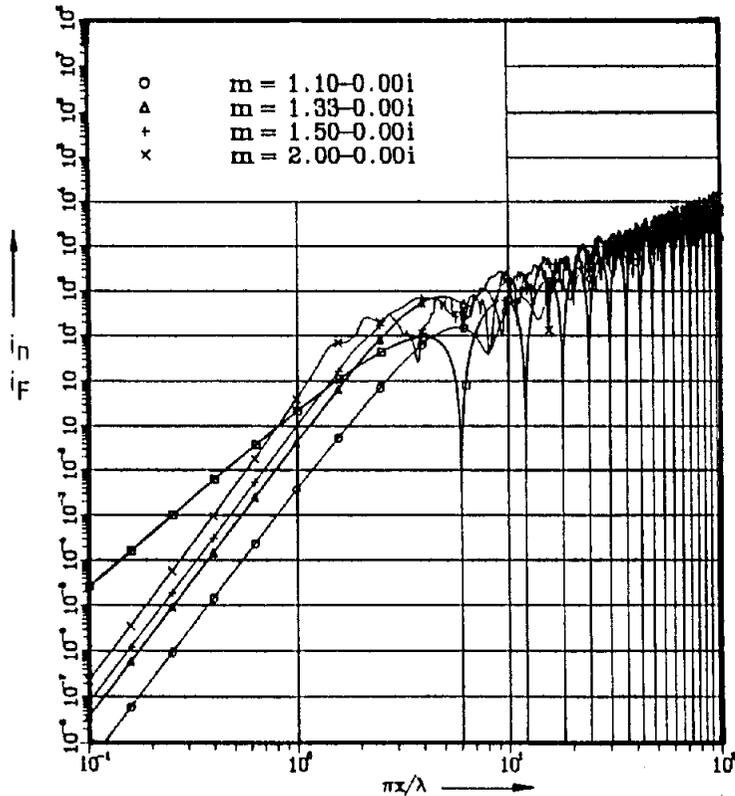


Abb. 6: Vergleich der Fraunhofer-Streufunktion mit den Mie-Streufunktionen nach Abb. 3 ($\theta = 30^\circ$)

Dieser direkte Vergleich zeigt, daß im betrachteten Grenzbereich $1 < \alpha < 10$ die Fraunhofer-Streufunktion mitten durch den Bereich verläuft, der durch die variierten Brechungsindices mittels der Mie-Lösung aufgespannt wird.

Als erstes Fazit läßt sich daraus die Überlegung ableiten, daß ein fehlerhaft angenommener oder nur bedingt bekannter Brechungsindex für den Anwender größere Unsicherheiten mit sich bringen kann, als die Abstützung auf eine dort bisher nicht für anwendbar gehaltene Auswertemethode.

4 Ausgewählte Ergebnisse

Um die Funktion eines nach dieser Erkenntnis modifizierten Fraunhofer-Gerätes im Bereich bis $0,1 \mu\text{m}$ zu testen, wurden zahlreiche systematische Versuche durchgeführt, von denen einige Ergebnisse vorgestellt werden sollen.

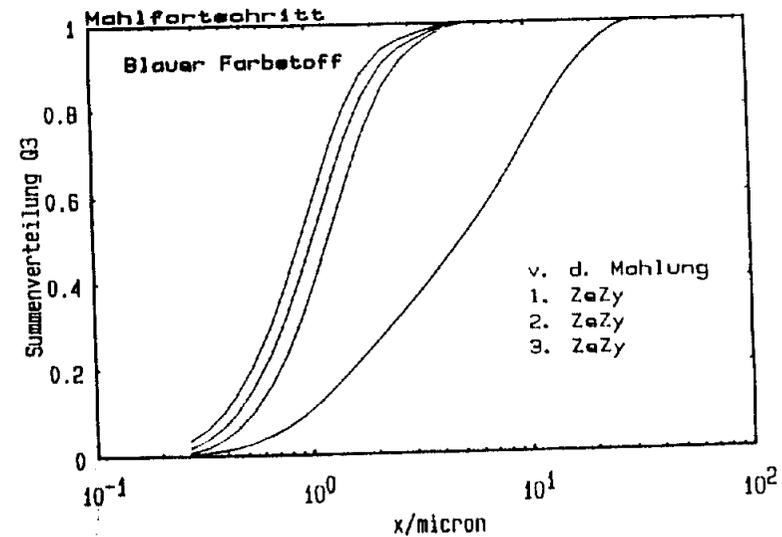


Abb. 7: Messungen bei Zerkleinerungsversuchen eines blauen Farbpigmentes

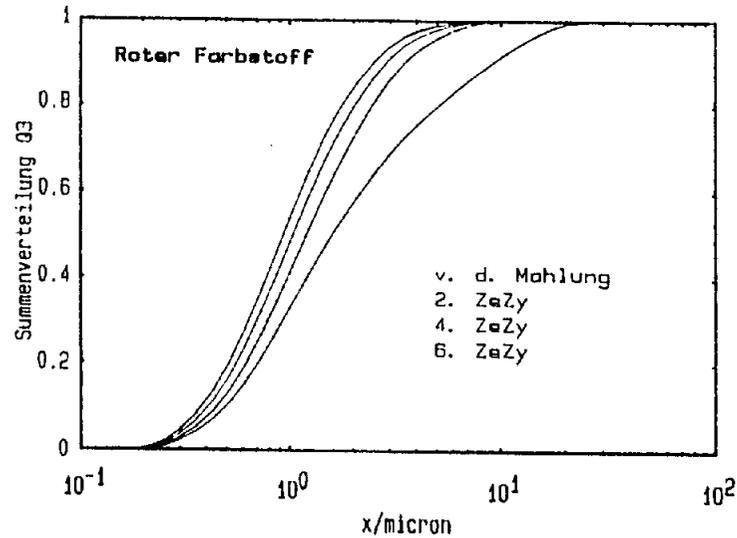


Abb. 8: Messungen bei Zerkleinerungsversuchen eines roten Farbpigmentes

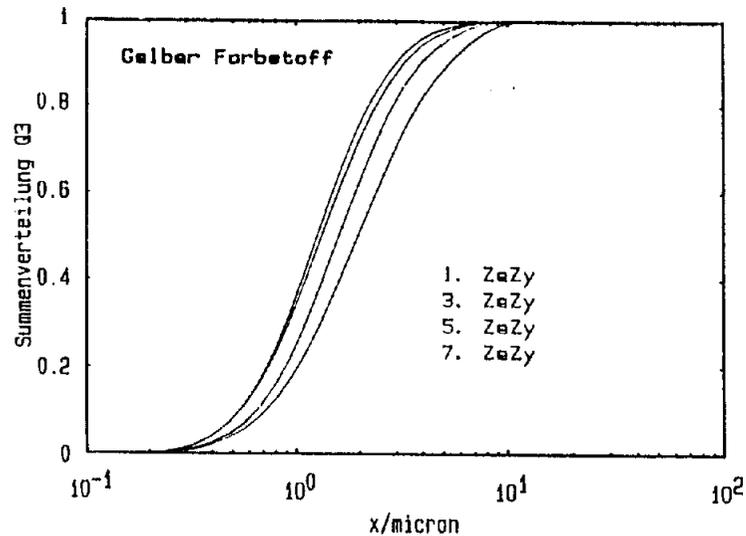


Abb. 9: Messungen bei Zerkleinerungsversuchen eines gelben Farbpigmentes

Die Abbildungen 7 bis 9 zeigen die Ergebnisse von Zerkleinerungsversuchen an drei verschiedenen Farbpigmenten. Die Messungen erfolgten vor der Mahlung und nach unterschiedlich vielen Zerkleinerungszyklen (ZeZy) in Rührwerkskugelmöhlen.

Die Pigmente "Blau", "Rot" und "Gelb" haben sowohl stark unterschiedliche Brechungsindices, als auch verschiedene Formen.

Die blauen Partikel waren plättchenförmig, die gelben stäbchenförmig, während eine Formausprägung bei den roten Partikeln nicht zu erkennen war. Trotzdem wurde der Mahlfortschritt eindeutig und mit hoher Reproduzierbarkeit nachgewiesen. Die immer geringer werdende Effizienz der Mahldurchgänge ist ebenfalls deutlich zu erkennen.

Damit ist eindeutig gezeigt, daß Veränderungen in den Partikelgrößenverteilungen im Submicron-Bereich zumindest qualitativ zuverlässig und reproduzierbar wiedergegeben werden.

Zuletzt sollen erste Vergleiche mit anderen Methoden vorgestellt werden. Um möglichst nah an "absolute" Vergleichsinformationen heranzukommen, wurde der Bezug zur REM-Technik gesucht.

In Abb. 10 sind die Summenkurven eines speziell hergestellten und von Verunreinigungen freien Latex dargestellt.

Die x_{50} -Werte der mit Bildanalyse (BA) von Weichert /12/ ausgewerteten REM-Aufnahmen und der Beugungs-Analyse liegen überraschend nah beieinander. Die Verbreiterung der Verteilung bei der Laser-Beugung war zu erwarten und tritt in der selben Form bei der Verwendung der Mie-Lösung auf.

Den selben Vergleich zwischen REM und HELOS zeigt die Abb. 11 für ein blaues Farbpigment.

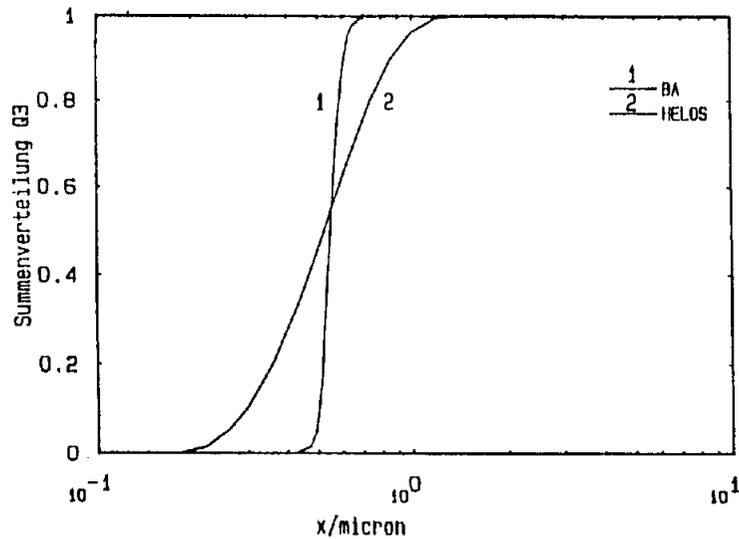


Abb. 10: Summenkurve eines Latex mit HELOS und Bildanalyse (BA)

Bei dieser breiten Verteilung wird neben der absoluten Lage auch Form, Verlauf und Breite durchaus typisch getroffen.

Die detaillierte Kommentierung ist ohne vertiefte Betrachtung gerade auch der präparativ sehr aufwendigen REM-Technik heute noch nicht abschließend möglich.

Abb. 12 zeigt den Extremfall einer am Rande des Meßbereichs liegenden Verteilung, die mit dem HELOS bei einer handelsüblichen Zeichentusche gemessen wurde. Die am untersten Rand des Meßbereichs liegende Verteilung bestätigt die auch dort vorhandene Empfindlichkeit des Gerätes. Gerade durch die Verfügbarkeit von 11 echten Meßpunkten unterhalb von $1\mu\text{m}$ und durch die Staffelung der Meßpunkte gelingt auch dann noch eine Verteilungsmessung, wenn, wie im letzten Beispiel alle Partikel $< 0,4\mu\text{m}$ sind und sogar mehr als 50% unterhalb des abgedeckten Meßbereiches liegen.

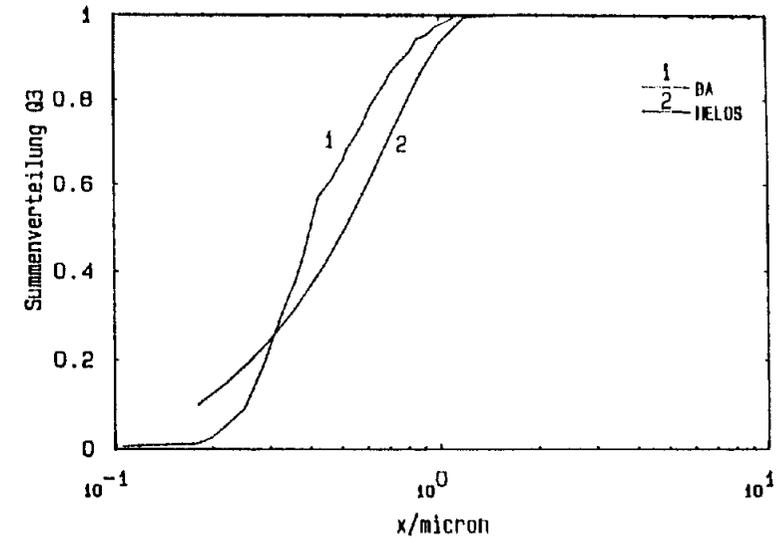


Abb. 11: Summenkurven eines blauen Farbpigmentes mit HELOS und Bildanalyse gemessen

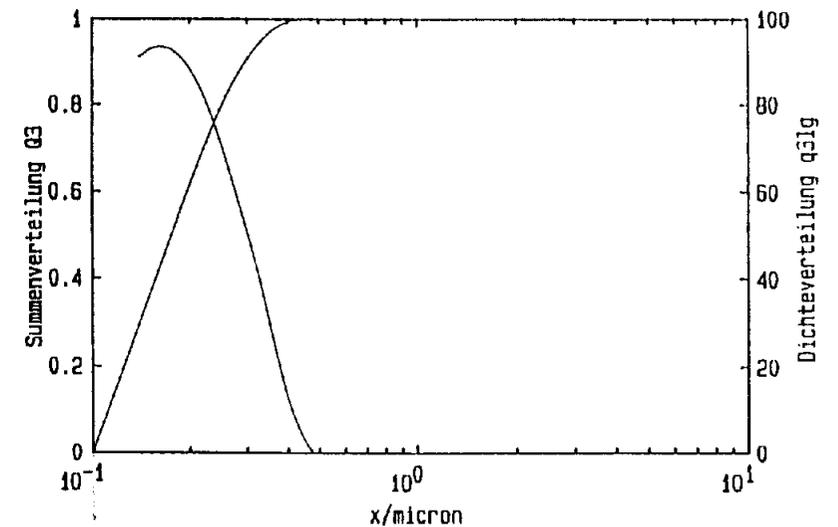


Abb. 12: Summenkurve einer handelsüblichen Zeichentusche mit HELOS gemessen

5 Zusammenfassung

Es wird ein kurzer Überblick zu den physikalischen Grundlagen und möglichen Lösungswegen zur Anwendung der Fraunhofer-Methode für die Analyse von Partikelgrößenverteilungen durch sogenannte Laser-Beugung gegeben. Aufbauend auf vergleichenden Betrachtungen zum Verlauf der Streufunktionen nach der Fraunhofer-Lösung und den überlagerten Einflüssen durch Brechung und Absorption bei der Mie-Methode wird der Submicron-Bereich bis $\alpha = 1$ in das erfolgreiche Fraunhofer-Konzept eingebunden.

Anhand von experimentellen Ergebnissen bestätigt sich die Anwendbarkeit durch hohe Reproduzierbarkeit und die zuverlässige Wiedergabe qualitativer und quantitativer Größeneffekte. Prinzipbedingte Einschränkungen und Restriktionen sind aus dem heutigen Kenntnisstand nicht gravierender als bei vergleichbaren anderen oder als bisher eher richtig erachteten Methoden.

Als Entwickler und Hersteller von Meßgeräten sehen wir unsere Aufgabe auch so, daß wir dem Anwender für die Praxis Lösungen auch in den Grenzbereichen erschließen. Im vorgestellten Themenkreis, der sich mit den Randbedingungen der Anwendung der Fraunhofer-Beugung im Submicron-Bereich befaßt, halten wir es heute eher für vertretbar und vom Meßkonzept her für erfolversprechend, dem Benutzer ein Instrument in die Hand zu geben, das mit bekannten aber verkraftbaren Aussageeinschränkungen methodenkonforme Meßinformation auch in den Grenzbereich liefert, als ihn mit scheinbar gesicherten Methoden in trügerischer Gewißheit zu wiegen und ihn dabei in der Tagesanwendung zu überfordern.

Die dabei erforderliche Hinzuziehung letztlich nicht zuverlässig bestimmbarer Parameter wie temperaturabhängige Brechzahl und Absorptionskoeffizient verlagert die Ungewißheit des Meßergebnisses auf Eingaben des Benutzers und das Umfeld außerhalb des Meßgerätes.

Beim heutigen Stand der gesicherten Erkenntnisse darf sich der Anwender in keinem Fall sicher sein, mittels welcher auch immer verwendeten Meßtechnik, die "physikalische Wahrheit" über sein Produkt gerade in den Grenzbereichen zu erfahren.

Die Laser-Beugung mittels Fraunhofer-Methode ist aber auf dem Weg, den Größenbereich zwischen 0,1 bis 10.000µm zuverlässig abzudecken und damit als optische Methode ihre mittlerweile dominierende Stellung noch zu verstärken.

6 Literatur

- /1/ M. Heuer: Verfahren zur Berechnung von Partikelgrößenverteilungen aus Beugungsspektren. 3. Fachtagung "Granulometrie 1983" 15.12.1983 Technische Hochschule Dresden.
- /2/ M. Heuer und K. Leschonski: Erfahrungen mit einem neuen Gerät zur Messung von Partikelgrößenverteilungen aus Beugungsspektren. Vortrag bei der PARTEC, 3. Europäisches Symposium "Partikelmeßtechnik" in Nürnberg, 9.-11. Mai 1984.
- /3/ K.S. Shifrin: (1956) Trudy VZLTI (Leningrad) No. 2 S. 153-162.
- /4/ J.H. Chin, C.M. Sliepcevich and M. Tribus: Determination of particle size distributions in polydispered systems. J. Phys. Chem. 59 (1955), S. 845-848.
- /5/ E.C. Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford 1924.
- /6/ L.P. Bayvel, J.C. Knight and G.N. Robertson: Application of the Shifrin-inversion to the Malvern particle sizer. Vortrag beim International "Symposium on optical particle sizing: Theory and practice", 12.-15. Mai 1987 INSA de Rouen.

- /77/ M.T. Chahine: Determination of the Temperature Profile in an Atmosphere from its Outgoing Radiance. Journal of the Optical Society of America, Vol. 58, No. 12, Page 1634, 1968.
- /8/ J.M. Mäkynen: A Test of an Inversion Method for Determination of Particle Size Distribution from Light Scattering Pattern. The Eleventh Annual Conference of the Association for Aerosol Research: Aerosols in science, medicine and technology.
- /9/ S.W. Provencher: An eigenfunction expansion method for the analysis of exponential decay curves. The Journal of Chemical Physics, Vol. 64, No. 7, Page 2772ff., 1 April 1976.
- /10/ B.L. Phillips: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J.ACM, 9(1962)84.
- /11/ S. Twomey: "Introduction to the Mathematics of Inversion in remote sensing and indirect Measurements", Elsevier, Amsterdam, 1977.
- /12/ R. Weichert: "Partikelgrößenanalyse submikroskopisch kleiner Partikel in Suspension" (persönl. Mitteilung 1988; Veröffentlichung in Vorbereitung), Universität Karlsruhe, Institut für Mechanische Verfahrenstechnik und Mechanik

7 Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

A	Koeffizientenmatrix
f	Brennweite
H	Glättungsmatrix
i	Imaginärteil
i_F	Streuungsfunktion der Fraunhofer-Lösung
i_k	Streuungsfunktionen in Abhängigkeit vom Absorptionsindex
i_n	Streuungsfunktionen in Abhängigkeit von der Brechzahl
I	Lichtintensität
I_0	Intensität des Laserstrahls
J_0	Besselfunktion erster Art nullter Ordnung
J_1	Besselfunktion erster Art erster Ordnung
k	Absorptionsindex
L	Lichtleistung
m	Brechungsindex des Partikels
n	Brechzahl
n_{fl}	Brechzahl der Flüssigkeit
N_{ges}	Gesamtanzahl
q	Vektor der gesuchten Größenverteilungswerte
q_0	Anzahldichteverteilung
q_2	Flächendichteverteilung
q_3	Volumendichteverteilung
Q_3	Volumensummenverteilung
r	Radius in der Brennebene
x	Partikeldurchmesser
z	Abkürzung
α	Mie'scher Parameter
γ	Lagrange'scher Multiplikator
θ	Streuungswinkel
λ	Wellenlänge
λ_0	Wellenlänge im Vakuum